曲线曲面积分与场论初步

KnezZz

2025 年 5 月 14 日

前言

由于笔者水平有限，尚未掌握 Tikz 矢量图的绘制，所以图片以手绘和扫描为主。待掌握其门道后再来填坑。并且本人也比较懒，有些地方会写得难免出现错误，尤其是以自己的话表述连通区域概念的部分，望见谅。

目录

1 曲线、曲面积分

1.1 第一类曲线、曲面积分

第一类曲线积分没啥好说的，表示为

$$\int_L f\mathrm{d}s$$

其中

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

这都是旧知识了。

再是第一类曲面积分，其公式为

$$S=\iint_D \sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中

$$\begin{aligned}
E&=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u=x_u^2+y_u^2+z_u^2\\
F&=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v\\
G&=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v=x_v^2+y_v^2+z_v^2
\end{aligned}$$

最重要的是要知晓其原理。其本质即是取一个面积元，但问题是如何取。是任取曲面上的三点构成的面积元，还是任意一点的俩条切向量构成的面积元。前者精度不够，后者更为合适。在 Schwarz 求解圆柱侧面积时尝试于利用前者来求解，最后发现其结果受到其它限制才可等于实际的侧面积。

其面积元的面积平方为

$$\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|^2=\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2=EG-F^2$$

那么这就很好理解上述公式了，即是对 D 上每一点面积元的面积求和。

若位矢为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+f(x,y)\boldsymbol{k}$$

则

$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若 $z=f(x,y)$, 而 $f(x,y)$ 无法显示表达，那么就需要利用隐函数存在定理

$$f_x=-\frac{H_x}{H_z},\ f_y=-\frac{H_y}{H_z}$$

$$H(x,y,z)=z-f(x,y)$$

因而

$$S=\iint\limits_{D}\frac{\|\nabla H\|}{|H_z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1.2 第二类曲线、曲面积分

记切向量 $\boldsymbol{\tau}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,$\boldsymbol{f}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$

$$\int\limits_{L}\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int\limits_{L}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\left[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma\right]\mathrm{d}s$$

注意到 $\mathrm{d}x=\cos\alpha\mathrm{d}s,\mathrm{d}y=\cos\beta\mathrm{d}s,\mathrm{d}z=\cos\gamma\mathrm{d}s$, 因而

$$\int\limits_{L}\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int\limits_{L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

而第二类曲面积分就会略有些难度，因为它是有方向性的，同时也会涉及一些外微分的知识以便于理解。

它的面积元的法向量可表示为

$$\pm\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\pm\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

那么它的单位法向量及其方向余弦为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\pm\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

正负如何取，这是人为规定的。例如人为规定取向为上，而单位法向量的 z 值为负，那么就该取负号。简单来讲即是正负与该值相同。

那么 $\boldsymbol{f}$ 在 Σ 上的第二类曲面积分为

$$\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{f}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} \left[P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

我们需格外注意 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, 它是有方向的

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\mathrm{d}S$$

前面在第一类曲面积分已经提到 $\mathrm{d}S = \sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

另外我们还可以使用外微分的知识。它同样具有方向性。

$$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \cos\alpha\mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x = \cos\beta\mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \cos\gamma\mathrm{d}S$$

因而

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = (\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$$

因而第二类曲面积分还可以写成

$$\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{f}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

这里我们通常省略外微分符号 $\wedge$, 但我们还是需要注意其具有方向性，尽管这与一般的重积分很是相似。其实这里还一个很明显的区别就是这里积分是限制在曲面 Σ 上，而一般的重积分是限制在一个投影面之上。

为加深理解，这里以函数 $H(x,y,z)$ 为例。

$\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{EG-F^2}}\left(H_x, H_y, H_z\right)$, 那么 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \pm\dfrac{1}{\|\nabla H\|}\left(H_x, H_y, H_z\right)\mathrm{d}S$。

若 $H = z - f(x,y)$, 那么 $\mathrm{d}S = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 那么 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \pm(-f_x, -f_y, 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 这相当于将其投影至 xOy 上。

其它情况可考虑换元。

总之，这一部分内容与第一类曲面积分联系紧密，需要着重消化与理解。

下面是几道例题以便于理解。

例 1. 计算 $\iint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为上半椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, z\geq 0(a,b,c>0)$, 方向取上侧。

解. 利用广义球面坐标，

$$x=a\sin\varphi\cos\theta,\quad y=b\sin\varphi\sin\theta,\quad z=c\cos\varphi, 0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$$

那么我们可以得到

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}=bc\sin^2\varphi\cos\theta,\quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}=ac\sin^2\varphi\sin\theta,\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=ab\sin\varphi\cos\varphi$$

那么

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iint\limits_{\substack{0\leq\theta\leq 2\pi\\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}}}\left(a^3bc\sin^5\varphi\cos^4\theta+b^3ac\sin^5\varphi\sin^4\theta+c^3ab\sin\varphi\cos\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\ =&\frac{2}{5}\pi abc(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

注意第二类曲面积分转换成重积分是取的正号，这是为什么呢?

这是因为 $\cos\gamma=\pm\dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\dfrac{\partial(z,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=\pm\dfrac{ab\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{EG-F^2}}$, 而 $\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, 且取向为上，故要取正号。

2 Green、Gauss、Stokes 公式及其统一形式

这些公式都只是适用于闭合的、无孔洞、单连通的。若不闭合需自己将其补充成闭合曲线/面。另外还有一个较为重要的是在这个区域上函数要有连续偏导数，若其中有瑕点，需单独拎出来。

对于有有限个空洞的、复连通但能分成有限块标准区域的，这些公式同样适用，具体证明不过多赘述，感觉不大重要，没必要。

2.1 Green Theorem

$$\int\limits_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 ∂D 取正向，即诱导定向。什么是诱导定向呢？简单来讲即是一个人沿着 ∂D 走，区域 D 一直在其左侧。

注意这个诱导定向。我在使用这个求解面积之时，被其困扰过，

想当然地选取了顺时针方向，而非诱导方向（逆时针），因而与答案相差一个负号。

2.1.1 曲线积分与路径无关条件

何为与路径无关？即是对于任意 A，B 俩点，积分值 $\int\limits_{L} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 只与 A,B 俩点有关。

这个问题可以归纳为Green 定理

定理 2.1. 设 D 为平面上的单连通区域，$P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上具有连续偏导数，则以下四个命题等价：

---

1. 对于 D 内任意一条光滑（或分段光滑）闭曲线 L，有

$$\int\limits_{L} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$$

2. 曲线积分 $\int\limits_{L} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 与路径无关。

3. 存在 D 上的可微函数 $U(x, y)$，使得

$$\mathrm{d}U = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

这时称 $U(x, y)$ 为 1-形式 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 的原函数。

4. 在 D 内成立

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

这样又可以归结出一个与路径无关的充要条件, 即

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = U(x_B, y_B) - U(x_A, y_A)$$

$U(x, y)$ 不就是势能函数嘛。

这让我想起了力与势能的关系——$\boldsymbol{F} = -\nabla U$

下面是一道典型例题。

例 2. 计算 $\int\limits_L \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 L 为一条不经过原点的简单闭合曲线, 方向为逆时针方向.

解. 注意 D 包含原点，而 $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 与 $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ 在原点不具备连续偏导数。那该怎么做呢?

我们只需要以原点为圆心做一个圆，区域为 D'，那么区域 $D\backslash D'$ 就满足了条件。因而

$$\int\limits_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} - \int\limits_l \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0$$

所以

$$\int\limits_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \int\limits_l \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 2\pi$$

这里 0 和 2π 如何得来，不详细写明了。前者只需要套用一下 Green 公式即可，后者只需做个换元即可。

说到这，我不禁疑问为何不直接换元来求？产生这样的想法的原因在于没有注意到 L 不一定是圆，所以很有必要间接地使用 Green 公式，使之计算于圆周之上。

例 3. $\int\limits_L \dfrac{e^x\left[(x\sin y - y\cos x)\,\mathrm{d}x + (x\cos y + y\sin y)\,\mathrm{d}y\right]}{x^2+y^2}$, 其中 L 是包围原点的简单光滑闭曲线，逆时针方向

解. 这题与上题类似，同样需要剔除原点这个瑕点，也没有具体给出 L 的函数，因而所取圆的半径最终要趋于 0, 这一点很重要。但为什么上一题没有取极限的过程？这是因为最后半径均被约掉了。

最后我们可以得到

$$\int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

因而

$$\text{原式} = \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi$$

2.2 Gauss Theorem

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

没啥好说的，以俩道例题了结，其中第二题曾一度困扰过我。

例 4. 设某种流体的速度为 $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, 求单位时间内流体流过曲面 $\Sigma : y = x^2 + z^2 (0 \le y \le h)$ 的流量，其中 Σ 的方向取左侧。

解. 首先流量为

$$\Phi = \iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

我们注意到 Σ 不是个封闭曲面，因而也就无法使用 Gauss 公式，但是我们可以自己构造一个曲面，使之封闭。这个曲面可以是任意的，怎么方便怎么来。我们不妨直接构造一个平面

$$\sigma : y = h, \quad x^2 + z^2 \le h$$

记 $\Sigma + \sigma$ 所围成的区域为 Ω, 那么由 Gauss 公式，得

$$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega} 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{3\pi}{2}h^2$$

接下来我们所要的求解的是 σ 上的流量

$$\iint_{\sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{x^2+z^2\leq h} h\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \pi h^2$$

因而

$$\boxed{\Phi = \frac{\pi}{2}h^2}$$

例 5. $\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, 方向取外侧。

解. **方法一**：由于对称性，我们不妨只先计算 $\iint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

这时我们需要将 Σ 分为上下两个球面, $\Sigma_1 : z = c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$, $\Sigma_2 : z = c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$.

此时 Σ_1 的法向量为 $\left(\frac{x-a}{S}, \frac{y-b}{S}, 1\right)$, $S=\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$, Σ_2 的法向量为 $\left(-\frac{x-a}{S}, -\frac{y-b}{S}, 1\right)$, 由于朝向为外侧，故在计算下半球面时要加负号。

困扰我的点在于为何不直接使用法向量 $(x-a, y-b, z-c)$, 这样不就不需要加负号了?细想一下这个法向量如何得来?不就是 $\nabla\left[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2\right]$。正是因为它来自 $F(x,y,z)$ 的梯度，才天然具有统一的、物理意义明确的方向 (外向)，而且跟上半球、下半球无关。而我们的目前的做法是什么? 是将原本的隐函数转换成了显函数 $z=f(x,y)$, 这样的法向量方向必然朝向 $+\hat{z}$, 因而在求解下半球时需要加负号。

接下来的求解过程省略了。最后的结果为

$$\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$$

方法二：利用 Gauss 公式。我们可以得到

$$\text{原式} = 2\iiint_{V}(x+y+z)\mathrm{d}V$$

而原函数关于 $(x-a, y-b, z-c)$ 对称，所以

$$\iiint\limits_V (x-a)\mathrm{d}V = \iiint\limits_V (y-b)\mathrm{d}V = \iiint\limits_V (z-c)\mathrm{d}V = 0$$

因而

$$\iiint\limits_V x\mathrm{d}V = \frac{4}{3}\pi R^3 a$$

所以结果为

$$\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$$

2.3 Stokes Theorem

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial z}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

这个公式实在是太难记了，但其实它可以化简为一个行列式

$$\int\limits_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

其实还可以进一步化简，当然这是我的个人化简，在教材上并未看到

$$\int\limits_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ \nabla \\ \boldsymbol{F} \end{vmatrix}, \text{ 其中} \boldsymbol{F} = (P, Q, R)$$

2.4 外微分

先以一个熟悉的例子入手。

设 $U \subset \boldsymbol{R}^n$ 为区域，U 上的可微函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$$

这就相当于一个 0-形式作了微分运算后成了 1-形式

现在将其推广至 Λ^k 上，即 k-形式

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} g_{i_1, i_2, \cdots, i_k}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$$

我们定义

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} (\mathrm{d}g_{i_1, i_2, \cdots, i_k}(\boldsymbol{x})) \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \\
&= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{i_1, i_2, \cdots, i_k}}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}
\end{aligned}$$

那么很显然

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) = 0$$

这里再补充 2 个性质

1. 设 ω 为 $k-$ 形式，η 为 $l-$ 形式，则

$$\mathrm{d}\left(\omega \wedge \eta\right) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta$$

2. 对任意 $\omega \in \Lambda$, 有 $\mathrm{d}^2\omega = 0$

老实说，对于第二个性质我也不大明晰于其意义，若仅是着眼于其代数证明，那的确会有点意思。为什么会有如此特殊的性质呢？这是由外微分的运算性质所产生。

2.5 统一形式

下面我们对不同的 ω 进行探讨.

首先，当 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 时，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge \mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\end{aligned}$$

其次，当 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 时，其本质与前者类似，其计算过程省略了

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$$

最后，当 $\omega = P\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$, 那么

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z$$

这样一来是不是可以把 Green、Gauss 和 Stokes 公式统一为

$$\boxed{\int\limits_{\partial M}\omega = \int\limits_{M}\mathrm{d}\omega}$$

我们再总结一下不同公式的 ω。Green 公式是 $\mathbb{R}^2$ 上的 1-形式，Stokes 公式是 $\mathbb{R}^3$ 上的 1-形式，而 Gauss 公式是 $\mathbb{R}^3$ 上的 2-形式。

其实，这个公式同样适用于 Newton-Leibniz 公式当中，请想想这是为什么？以及它的 ω 对应的是什么形式？

这里我给出答案。我们回想一下 Newton-Leibniz 公式——$\int_a^b \mathrm{d}f = f(x)|_a^b$. 那么 ω 就对应 f, 它是在 $\mathbb{R}$ 上的 0-形式。其定义域 $D = [a,b]$ 的诱导边界为 $\partial D = \{a,b\}$, 那么上式就可以表示为

$$\int\limits_{\partial D} f = \int\limits_{D}\mathrm{d}f$$

3 场论

3.1 梯度

梯度为

$$\mathbf{grad} f = f_x \boldsymbol{i} + f_y \boldsymbol{j} + f_z \boldsymbol{k}$$

那么沿着方向

$$\boldsymbol{l} = \cos(\boldsymbol{l}, x)\boldsymbol{i} + \cos(\boldsymbol{l}, y)\boldsymbol{j} + \cos(\boldsymbol{l}, z)\boldsymbol{k}$$

其方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \mathbf{grad} f \cdot \boldsymbol{l}$$

若方向时梯度方向，即法线方向，它的函数值增加最快。相反则减少最快。很明了的例子就是等高线图。

3.2 通量与散度

我们假设 Ω 上稳定流动的不可压缩流体（假定密度为 1）的速度场为

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k}$$

那么在单位时间内通过 Σ 流向指定侧的流量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

若 $\Phi > 0$, 则 Σ 内存在源头（源）；若 $\Phi < 0$, 则 Σ 内存在漏洞（汇）；若 $\Phi = 0$，则 Σ 为无源场。

那么要判断是源还是汇，只需判断 Φ 即可，因而我们就需要考察 Σ 所围成的区域 V 收缩到 M 点时的 Φ 以判断在 M 点处是源还是汇。但这很显然 Φ 必定为 0，这是因为 V 无限小。因而，我们实际需要考察的是单位体积的流量（当然这并不改变物理意义）。

利用中值定理，我们可以得到

$$\lim_{V \to M} \frac{\Phi}{mV} = \lim_{\widetilde{M} \to M} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_{\widetilde{M}} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

其中 mV 为 V 的体积，$\widetilde{M}$ 为 V 上某一点。

因此，对于向量场 $\boldsymbol{a} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$, 我们可以称

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

为向量场 $\boldsymbol{a}$ 在 M 点的散度，记为 $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)$.

那么

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \lim_{V \to M} \frac{\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{mV}$$

换句话说，散度即为穿出单位体积边界的通量。

那么 Gauss 公式就可以写成

$$\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{a} \mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

3.2.1 向量线

什么是向量线？拿个简单的例子，一个质点的运动轨迹即为向量线，它的速度始终与轨迹相切。那么，下面给出简单给出其定义其满足的条件。

若曲线 Γ 上的每一点处的切线方向都与场向量在该点的切线方向一致，那么 Γ 就是向量场的向量线。

设向量场 $\boldsymbol{a} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$，$M(x, y, z)$ 为向量线上任一点，则其矢量方程为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

那么它的切向量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}$$

由定义我们可知

$$\frac{\mathrm{d}x}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{Q} = \frac{\mathrm{d}z}{R}$$

下面我们以点电荷所产生的静电场为例。

由 Coulomb 定律，我们可知，在位于原点的点电荷 q 在任一点 $M(x, y, z)$ 的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{i} + \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{j} + \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{k}$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，ε_0 为真空介电常数,$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$。

那么我们可以得到电场线所满足的关系式

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

因而，我们就得到了

$$\begin{cases} y=C_1x \\ z=C_2x \end{cases}$$

这就是一簇从原点出发的射线。

3.2.2 Gauss' Law

继续上面的讨论，我们进而可以得到（别看了，自己算一遍）

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2-3x^2}{r^5}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{qy}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2-3y^2}{r^5}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2-3z^2}{r^5}$$

那么

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{E}=0$$

并且十分值得注意的是，这里是有条件的——$x^2+y^2+z^2\neq 0$

1. 设 S 是以原点为圆心，R 为半径的球面，定向取外侧。于是从内部穿出球面 S 的通量（电通量）为

$$\Phi=\iint\limits_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\mathrm{d}S=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

2. 设 Σ 为任意一张光滑或分片光滑的封闭曲面.

   (a) 若 Σ 内不含原点. 记 Σ 所包围的区域为 Ω, 则由 Gauss 公式得

$$\Phi=\iint\limits_\Sigma \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\limits_\Omega \mathrm{div}\ \boldsymbol{E}\mathrm{d}V=0$$

(b) 若 Σ 内包含有原点，这一情况与例2和例3同理。那么我们记小球面为 σ, 定向取外侧。因而，

$$\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

那么

$$\Phi = \iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

这就是电磁学中的 Gauss 定律。

3.3 环量与旋度

定义 3.1. 设

$$\boldsymbol{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}, \quad (x,y,z) \in \Omega$$

是一个向量场，P, Q, R 在 Ω 上具有连续偏导数.

设 M 为这个场中任一点，称向量

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

为向量场 $\boldsymbol{a}$ 在 M 点的**旋度**，记为 $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{a}(M)$ 或 $\mathbf{curl}\, \boldsymbol{a}(M)$.

若 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a} = 0$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 为无旋场。

于是，Stokes 公式可以写成

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{rot}\ \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int\limits_{\partial\Sigma} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

3.3.1 Ampère's Circuital Law

设一根无限长直线导线载有电流 I。由 Biot-Savart Law 可知，电流产生的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

我们任取一张垂直于导线的平面为 xy 平面，那么在 $M(x,y,z)$ $(x^2+y^2\neq 0)$ 处的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，于是

$$\textbf{rot } \boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{r^2} & \frac{x}{r^2} & 0 \end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

注意，这里也同样要求 $x^2+y^2\neq 0$.

1. 对位于垂直于导线的平面上的、围绕导线的任意简单闭曲线 Γ。取定向为逆时针方向。依例2，我们可知

$$\int_{\Gamma}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot 2\pi=\mu_0 I$$

2. 对于空间中任一条简单闭曲面 Γ（注意，这个曲线不一定在同一平面上），取逆时针为定向。记以 Γ 为边界的曲面为 Σ.

   (a) 若导线不穿过曲面 Σ, 那么

   $$\int_{\Gamma}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint_{\Sigma}\textbf{rot } \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

   (b) 若导线穿过曲面 Σ<u>一次</u>。这时也同理，作一张垂直于导线的平面，它以曲面 Σ 的交线为边界。记这个平面为 C, 那么由 Stokes 公式得

   $$\int_{\Sigma}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}-\int_{C}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint_{\Sigma-C}\textbf{rot } \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

   所以

   $$\int_{\Sigma}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_{C}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mu_0 I$$

综上,

$$\int_{\Gamma}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mu_0 I$$

这是对于导线穿过一次曲面，而对于导线穿过多次的情况呢？单位长度有 n 匝线圈产生的磁感应强度似乎就是这一情况，那么此时

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = n\mu_0 I$$

这个不必多说，无非就是多作几个类似的平面以排除原点这一瑕点。

这就是 Ampère 环路定律。

3.4 Hamilton Operator and Laplace Operator

先是 Hamilton 算子，记作 $\boldsymbol{\nabla}$, 读作 "Nabla" 或 "Del" .

我们定义

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} = \mathbf{grad} f$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a} = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{a}$$

显然，

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} f = \mathrm{div}(\mathbf{grad} f) = \Delta f$$

这里记号 $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为Laplace 算子. 若满足Laplace 方程

$$\boldsymbol{\Delta} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

的函数叫做调和函数。

这样 Gauss 公式就可以表示为

$$\iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a} \mathrm{d}V$$

Stokes 公式就可以表示为

$$\int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_{\Sigma} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

3.4.1 Green 第一公式和 Green 第二公式

这里仅是简单介绍，教材里也写得很简略，仅是提到其在数学物理应用之多。

设函数 f, g 具有二阶连续偏导数，那么我们很容易就可知

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(g\boldsymbol{\nabla}f)=\boldsymbol{\nabla}g\cdot\boldsymbol{\nabla}f+g\boldsymbol{\nabla}^2 f=\boldsymbol{\nabla}g\cdot\boldsymbol{\nabla}f+g\Delta f$$

那么由 Gauss 公式，我们得到

$$\iiint\limits_{\Omega}(\boldsymbol{\nabla}g\cdot\boldsymbol{\nabla}f+g\Delta f)\mathrm{d}V=\iint\limits_{\partial\Omega}g\boldsymbol{\nabla}f\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\partial\Omega}g(\mathbf{grad}f\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=\iint\limits_{\partial\Omega}g\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S \tag{1}$$

同理

$$\iiint\limits_{\Omega}(\boldsymbol{\nabla}f\cdot\boldsymbol{\nabla}g+f\Delta g)\mathrm{d}V=\iint\limits_{\partial\Omega}f\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S \tag{2}$$

(2)-(1), 我们就可以得到

$$\iiint\limits_{\Omega}(f\Delta g-g\Delta f)\mathrm{d}V=\iint\limits_{\partial\Omega}\left(f\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{n}}-g\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S \tag{3}$$

式1和式2为 Green 第一公式, 而式3称为 Green 第二公式。特别是 Green 第二公式，有种简洁与对称之美。

3.4.2 基本运算关系

书上一个证明都没有, 而是要求我们独自证明, 下面我将会给出 (3)-(7) 的证明，(1) 和 (2) 显而易见，不加以证明了。

首先我先给出这七组基本运算关系:

$$(1)\mathrm{div}(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mathrm{div}\ \boldsymbol{a}+\mu\mathrm{div}\ \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a})+\mu(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b})$$

$$(2)\mathbf{rot}(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}+\mu\mathbf{rot}\ \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})+\mu(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})$$

$$(3)\mathrm{div}(f\boldsymbol{a})=f\mathrm{div}\ \boldsymbol{a}+\mathbf{grad}f\cdot\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\boldsymbol{a})=f\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{\nabla}f)\cdot\boldsymbol{a}$$

$$(4)\mathbf{rot}(f\boldsymbol{a})=f\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}+\mathbf{grad}f\times\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\boldsymbol{a})=f\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{\nabla}f)\times\boldsymbol{a}$$

$$(5)\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{rot}\ \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})$$

$$(6)\mathbf{rot}(\mathbf{grad}f)=\mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}f)=(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla})f=\mathbf{0}$$

$$(7)\mathrm{div}(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})=0$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})=0$$

其中 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$

下面我简略地给出证明 (这东西敲得有点累)。

证明. 对于式 (3), 我们知道 $f\boldsymbol{a}=fa_x\boldsymbol{i}+fa_y\boldsymbol{j}+fa_z\boldsymbol{k}$, 那么

$$\mathrm{div}(f\boldsymbol{a})=\frac{\partial(fa_x)}{\partial x}+\frac{\partial(fa_y)}{\partial y}+\frac{\partial(fa_z)}{\partial z}$$

接着利用乘积的求导公式，我们很容易就可以得证。

对于式 (4)，我们知道

$$\mathbf{rot}(f\boldsymbol{a})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\fa_x&fa_y&fa_z\end{vmatrix}$$

那么根据乘积的求导法则，可知先对 a_i 进行求导时，此时 f 可以提出来，因而有一项为 $f\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}$. 而对 f 求导时，我们可以从结果可以看出第二项为 $\mathbf{grad}f\times\boldsymbol{a}$. 因而式 (4) 证毕。

对于式 (5)，首先我们先计算出 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-b_ya_z)\,\boldsymbol{i}+(a_zb_x-b_za_x)\,\boldsymbol{j}+(a_xb_y-b_xa_y)\,\boldsymbol{k}$$

于是，

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=&b_z\frac{\partial a_y}{\partial x}-b_y\frac{\partial a_z}{\partial x}+a_y\frac{\partial b_z}{\partial x}-a_z\frac{\partial b_y}{\partial x}\\&+b_z\frac{\partial a_z}{\partial y}-b_z\frac{\partial a_x}{\partial y}+a_z\frac{\partial b_x}{\partial y}-a_x\frac{\partial b_z}{\partial y}\\&+b_y\frac{\partial a_x}{\partial z}-b_x\frac{\partial a_y}{\partial z}+a_x\frac{\partial b_y}{\partial z}-a_y\frac{\partial b_x}{\partial z}\end{aligned}$$

我们再整理一下便得到

$$\begin{aligned}&(b_x,b_y,b_z)\cdot\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z},\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x},\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\\-&(a_x,a_y,a_z)\cdot\left(\frac{\partial b_z}{\partial y}-\frac{\partial b_y}{\partial z},\frac{\partial b_x}{\partial z}-\frac{\partial b_z}{\partial x},\frac{\partial b_y}{\partial x}-\frac{\partial b_x}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

这便是

$$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b})$$

对于式 (6), 自己计算一下即可

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}f)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\\frac{\partial f}{\partial x}&\frac{\partial f}{\partial y}&\frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

同理，式 (7) 也是如此。 □

3.5 保守场与势函数

定义 3.2. 设

$$\boldsymbol{a}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k},\quad(x,y,z)\in\Omega$$

为向量场，其中 P,Q,R 在 Ω 上连续。若存在函数 $U(x,y,z)$ 满足 $\boldsymbol{a}=\mathbf{grad}U$，则称向量场 $\boldsymbol{a}$ 为**有势场**，并称 $V=-U$ 为势函数。

若向量场中的曲线积分和路径无关，那么称 $\boldsymbol{a}$ 为保守场。

3.5.1 一维和二维单连通区域

下面是以我自己话进行表述，并非是严格的数学表述。

俩者字面上的一维和二维并非是空间区域的一维和二维，而是作出的判断区域的维数。

比如一维单连通意味着任意一条该区域内的封闭曲面能够收缩这该区域内一点。收缩的方式是任意的，只需存在这样的一种收缩，即可表明他是一维单连通区域。若存在某条封闭曲线无论如何都收缩不到区域内一点，则不是一维单连通，比如甜甜圈。

再是二维单连通区域，它意味着任意一个该区域的封闭曲面都能够收缩至该区域内的一点。同样，它的收缩方式也是任意的，也只需存在这样的一个收缩即可。比如，对于空心球 $\{(x,y,z)\,|\,1<x^2+y^2+z^2<3\}$，它就不是二维单连通区域，但它是一维单连通区域。

若将其推广至高维，那么就得需要严格数学表述，这或许是微分几何和拓扑的内容，仍有待我进一步学习。

定理 3.1. 设 $\Omega \in \mathbb{R}^3$ 为单连通区域，在这上面定义了向量场 $\boldsymbol{a}$, 那么下面三个命题等价：

（1）$\boldsymbol{a}$ 是保守场

（2）$\boldsymbol{a}$ 是有势场

（3）$\boldsymbol{a}$ 是无旋场

教材上并为给出证明，下面我简略地给出证明。我们以 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) 的顺序进行证明，该证明与 Green 定理的证明类似。

证明. 首先是 (1) $\Rightarrow$ (2), 我们设

$$U(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

我们要证明这个，即是证明 $U_x=P, U_y=Q, U_z=R$. 下面我们只证明 $U_x=P$，其它是同理的。

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta U}{\Delta x} &= \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} \\
&= \frac{1}{\Delta x}\left(\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x+\Delta x,y,z)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z - \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\right) \\
&= \frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} P\mathrm{d}x = P(\xi, y, z)
\end{aligned}
$$

最后一步利用了积分中值定理，$\xi \in (x, x+\Delta x)$, 那么当 $\Delta x \to 0$ 时，$U_x = P$. 即证。

然后再是 (2) $\Rightarrow$ (3), 我们代入计算即可. 首先我们知道

$$U_x = P,\ U_y = Q,\ U_z = R$$

那么，

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

进而

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}\right)\boldsymbol{k}$$

又由于 U 具有连续偏导数，故偏导顺序可以交换，所以

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$$

即证!

最后再是 (3) $\Rightarrow$ (1), 利用 Stokes 公式即可，值得注意的是使用 Stokes 公式得前提是单连通区域。

$$\int\limits_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint\limits_S \mathbf{rot}\ \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathbf{0}$$

即证! □

从证明过程中我们可以发现，

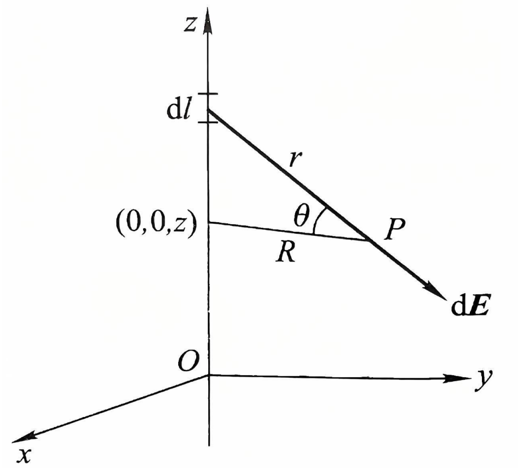
$$\text{保守场} \overset{\Omega\ \text{无需为单连通}}{\Longleftrightarrow} \text{有势场} \overset{\Omega\ \text{需为单连通}}{\Longleftrightarrow} \text{无旋场}$$

其实，再细节一点，有势场推导无旋场也同样无需要求 Ω 为单连通。

下面我们不加以证明地得到一个结论

$$\int_{\widehat{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = U(B) - U(A) = V(A) - V(B)$$

下面以无限长的均匀带电导线为例，探讨其旋度、势函数和电力线分布。



我们已知其电荷分布的线密度为 q

设 $\mathrm{d}\ell$ 的坐标为 $(0,0,a)$, 那么由 Coulomb 定律，我们得到

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\mathrm{d}\ell}{r^3}\boldsymbol{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\mathrm{d}\ell}{r^3}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (z-a)\boldsymbol{k})$$

那么

$$\mathrm{d}E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\mathrm{d}\ell}{r^3}x,\ \mathrm{d}E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\mathrm{d}\ell}{r^3}y$$

记 $R = \sqrt{x^2+y^2}$，那么 $r = \dfrac{R}{\cos\theta}$, 并且 $\ell = R\tan\theta$, 那么

$$\mathrm{d}\ell = R\sec^2\theta\mathrm{d}\theta$$

因而

$$E_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{R^2}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{R^2},\ E_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qy}{R^2}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qy}{R^2}$$

于是,

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{R^2}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qy}{R^2}\boldsymbol{j}+0\cdot\boldsymbol{k}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}$$

于是我们得到

$$\textbf{rot }\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$$

所以 $\boldsymbol{E}$ 是无旋场。因而它也是有势场和保守场。那么它的势函数为

$$V=-U=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{x_0^2+y_0^2}{x^2+y^2}$$

这里要求 $x_0^2+y_0^2\neq 0$. 于是它的等势线方程为

$$x^2+y^2=C$$

下面探讨它的电力线, 它满足方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x}{x^2+y^2}}=\frac{\mathrm{d}y}{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{y}{x^2+y^2}}=\frac{\mathrm{d}z}{0}$$

于是

$$\begin{cases}y=C_1x\\z=C_2\end{cases}$$

这在数学上很好地描述了电场的一些特性。

4 参考文献

[1] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析（第三版）（下）. 北京: 高等教育出版社, 2019 年.

[2] Princeton Review. *Cracking the GRE Mathematics Subject Test.* 4th Edition. Princeton Review, 2010. ISBN 978-0-375-42972-9.

[3] 林小苹, 谭超强, 李健. 新编微积分（理工类）（下）. 北京: 北京大学出版社, 2021 年.